МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

Г.А. ПОПОВА

МАТЕМАТИКА

**Методическое пособие
и контрольные задания для студентов заочно-сокращенной
формы обучения направлений «Конструкторско-технологическое
обеспечение машиностроительных производств», «Наземные
транспортно-технологические комплексы», «Эксплуатация
транспортно-технологических машин
и комплексов»**

Рубцовск 2012

УДК 517.5

Попова Г.А. Математика: Методическое пособие и контрольные задания для студентов заочно-сокращенной формы обучения направлений «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Наземные транспортно-технологические комплексы», «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» // Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2012.- 46 с.

Издание содержит указания к выполнению контрольной работы 1-го семестра, а также решения подобных задач, тщательный разбор которых поможет студенту-заочнику выполнить соответствующую контрольную работу.

Настоящее пособие подготовлено для студентов 1 курса заочного отделения инженерных специальностей.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМФиХ Рубцовского индустриального института
Протокол № 3 от 29.11.2012г.

Рецензент:
к.т.н., доцент Э.С. Маршалов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Порядок выполнения контрольных работ

На первом курсе обучения студенты-заочники, обучающиеся по сокращенной программе, в первом семестре выполняют контрольную работу №1.

К выполнению контрольной работы следует приступать только после изучения соответствующего материала курса по лекциям и учебнику с достаточным количеством задач в каждой теме. Следует внимательно разобрать решения тех задач, которые приводятся в данном пособии к каждой теме.

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждую работу следует выполнять в отдельной тетради, на внешней обложке которой должны быть указаны фамилия и инициалы студента, полный шифр, номер контрольной работы, курс и специальность, дата ее отправки в институт.

2. Решения всех задач и пояснения к ним должны быть достаточно подробными. Следует делать соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием формул, теорем, выводов, которые используются при решении данной задачи. Все вычисления необходимо делать полностью. Чертежи и графики должны быть выполнены аккуратно и четко с указанием единиц масштаба, координатных осей и других элементов чертежа.

Для замечаний преподавателя необходимо на каждой странице оставлять поля шириной 3-4 см.

3. После получения работы (как зачтенной, так и незачтенной) студент должен исправить в ней все отмеченные рецензентом недостатки. В случае незачета студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, **приложив при этом первоначально выполненную работу.**

4. В период экзаменационной сессии студент обязан представить все прорецензированные и зачтенные контрольные работы. При необходимости студент должен давать на экзамене **устные пояснения** ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этих работах.

5. Студент выполняет тот вариант контрольных работ, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра (номер зачетной книжки).

6. Если в процессе изучения материала или при решении той или иной задачи у студента возникают вопросы, на которые он не может ответить сам, то ему следует обратиться к ведущему преподавателю для получения консультации.

2. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Тема 1. Элементы аналитической геометрии на плоскости

Примеры решения задач

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(4;\ 3)$, $B(16;-6)$, $C(20;\ 16)$. Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) угол B в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты CD и ее длину; 5) уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD; 6) уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно стороне AB; 7) координаты точки M, расположенной симметрично точке A относительно прямой CD.

Решение:

1. Расстояние d между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2.1)$$

Применяя (2.1), находим длину стороны AB:

$$|AB| = \sqrt{(16-4)^2 + (-6-3)^2} = \sqrt{144+81} = 15.$$

2. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (2.2)$$

Подставляя в (2.2) координаты точек A и B, получим уравнение стороны AB:

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \qquad \frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}; \qquad \frac{y-3}{-3} = \frac{x-4}{4};$$

$$4y - 12 = -3x + 12; \quad 3x + 4y - 24 = 0. \ (AB)$$

Решив последнее уравнение относительно y, находим уравнение стороны AB в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$4y = -3x + 24; \qquad y = -\frac{3}{4}x + 6, \text{ откуда } k_{AB} = -\frac{3}{4}.$$

Подставив в (2.2) координаты точек B и C, получим уравнение прямой BC:

$$\frac{y+6}{16+6} = \frac{x-16}{20-16}; \quad \frac{y+6}{22} = \frac{x-16}{4}; \quad \frac{y+6}{11} = \frac{x-16}{2}; \quad 11x - 2y - 188 = 0 \quad (BC),$$

или $y = 5{,}5x - 94$, откуда $k_{BC} = 5{,}5$.

3. Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми, угловые коэффициенты которых соответственно равны k_1 и k_2, вычисляется по формуле

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \qquad (2.3)$$

Искомый угол B образован прямыми AB и BC, угловые коэффициенты которых найдены: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$; $k_{BC} = 5,5$. Применяя (2.3), получим

$$tg\angle B = \left|\frac{k_{AB} - k_{BC1}}{1 + k_{AB} \cdot k_{BC}}\right| = \left|\frac{-\frac{3}{4} - 5,5}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 5,5}\right| = \left|\frac{-25}{4 - 16,5}\right| = 2;$$

$\angle B = 63^0 26'$ или $\angle B \approx 1,11$ рад.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид

$$y - y_1 = k \quad x - x_1 \quad . \tag{2.4}$$

Высота CD перпендикулярна стороне AB. Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD, воспользуемся условием перпендикулярности прямых. Так как $k_{AB} = -\frac{3}{4}$, то $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = \frac{4}{3}$.

Подставив в (2.4) координаты точки C и найденный угловой коэффициент высоты, получим

$$y - 16 = \frac{4}{3} \quad x - 20 \quad ; \;\; 3y - 48 = 4x - 80; \;\; 4x - 3y - 32 = 0 \;\; (CD).$$

Чтобы найти длину высоты CD, определим сначала координаты точки D— точки пересечения прямых AB и CD. Решая совместно систему:

$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0, \\ 4x - 3y - 32 == 0, \end{cases}$ находим $x = 8$, $y = 0$, т.е. $D(8;\, 0)$.

По формуле (2.1) находим длину высоты CD:

$$\left|\tilde{N}D\right| = \sqrt{\quad 20 - 8 \quad ^2 + \quad 16 - 0 \quad ^2} = 20.$$

5. Чтобы найти уравнение медианы AE, определим сначала координаты точки E, которая является серединой стороны BC, применяя формулы деления отрезка на две равные части:

$$x_E = \frac{x_C + x_B}{2}; \qquad y_E = \frac{y_C + y_B}{2}. \tag{2.5}$$

Следовательно,

$$x_E = \frac{16 + 20}{2} = 18; \quad y_E = \frac{-6 + 16}{2} = 5.$$

Подставив в (2.2) координаты точек A и E, находим уравнение медианы:

$$\frac{y - 3}{5 - 3} = \frac{x - 4}{18 - 4}; \qquad \frac{y - 3}{2} = \frac{y - 3}{2} = \frac{x - 4}{14}; \qquad x - 7y + 17 = 0 \qquad (AE).$$

Чтобы найти координаты точки пересечения высоты CD и медианы AE, решим совместно систему уравнений

$\begin{cases} 4x - 3y - 32 = 0, \\ x - 7y + 17 = 0. \end{cases}$ Находим $K(11;4)$.

6. Так как искомая прямая параллельна стороне *AB*, то ее угловой коэффициент будет равен угловому коэффициенту прямой *AB*. Подставив в (2.4) координаты найденной точки *K* и угловой коэффициент $k=-\frac{3}{4}$, получим

$$y-4=-\frac{3}{4}\ x-11\ ;\ 4y-16=-3x+33, \qquad 3x+4y-49=0 \quad (KF).$$

6. Так как прямая *AB* перпендикулярна прямой *CD*, то искомая точка *M*, расположенная симметрично точке *A* относительно прямой *CD*, лежит на прямой *AB*. Кроме того, точка *D* является серединой отрезка *AM*. Применяя формулы (2.5), находим координаты искомой точки *M*:

$$8=\frac{4+x_M}{2};\ x_M=12;\ 0=\frac{3+y_M}{2};\ y_M=-3;\ M\ \ 12;\ 3\ \ .$$

Треугольник *ABC*, высота *CD*, медиана *AE*, прямая *KF* и точка *M* построены в системе координат *xOy* на рис. 1.

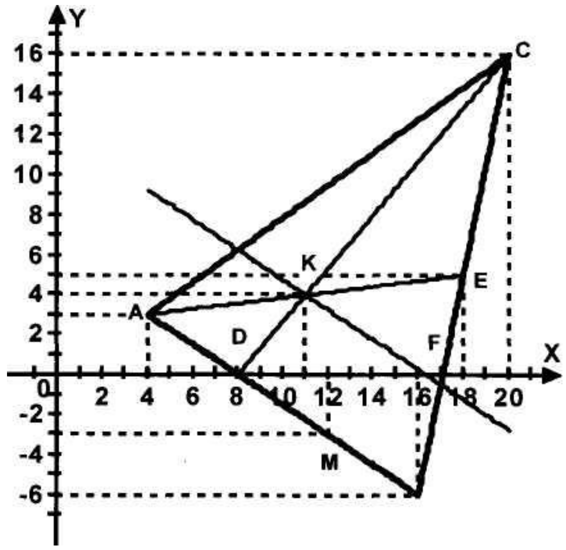


Рис. 1

Задача 2. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до данной точки *A*(4; 0) и до данной прямой *x*=1 равно 2.

Решение. В системе координат *xOy* построим точку *A*(4;0) и прямую *x*=1. Пусть *M*(*x; y*) – произвольная точка искомого геометрического места точек.

Опустим перпендикуляр *MB* на данную прямую *x* = 1 и определим координаты точки *B*. Так как точка *B* лежит на заданной прямой, то ее абсцисса равна 1. Ордината точки *B* равна ординате точки *M*. Следовательно, *B*(1; *y*) (рис. 2).

По условию задачи |*AM*| : |*BM*| = 2. Расстояния |*MA*| и |*MB*| находим по формуле (2.1) задачи 1:

$$\frac{\sqrt{\ x-4\ ^2+\ y-0\ ^2}}{\sqrt{\ x-1\ ^2+\ y-y\ ^2}}=2.$$

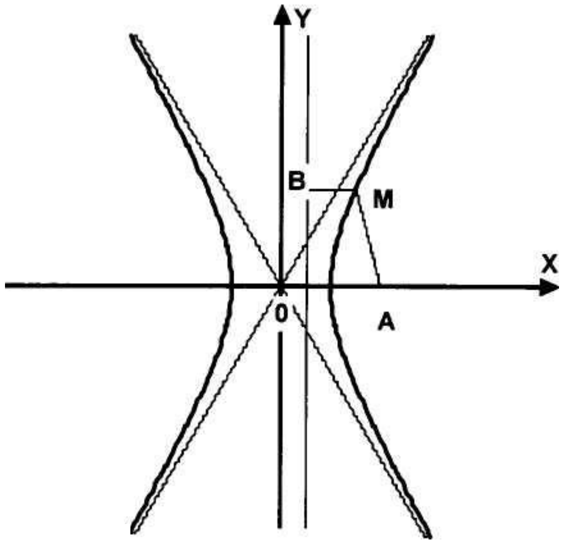


Рис. 2

Возведя в квадрат левую и правую части, получим

$$\frac{x^2-8x+16+y^2}{x^2-2x+1}=4; \qquad x^2-8x+16y^2=4x^2-8x+4;$$

$$3x^2-y^2=12 \text{ или } \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1.$$

Полученное уравнение представляет собой гиперболу, у которой действительная полуось $a = 2$, а мнимая $-b=2\sqrt{3}$.

Определим фокусы гиперболы. Для гиперболы выполняется равенство $c^2=a^2+b^2$. Следовательно, c^2 = 4 + 12 = 16; c = 4 и F_1 –4; 0 , F_2 4; 0 - фокусы гиперболы. Как видно, заданная точка $A(4;0)$ является правым фокусом гиперболы.

Определим эксцентриситет полученной гиперболы: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{2}=2$.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$.

Следовательно, $y=\frac{2\sqrt{3}}{2}x$, или $y=\sqrt{3}x$ и $y=-\sqrt{3}x$ - асимптоты гиперболы. Прежде чем построить гиперболу, строим ее асимптоты.

Задача *3*. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(4;\ 3)$ и прямой $y=1$. Полученное уравнение привести к простейшему виду.

Решение: Пусть $M(x;\ y)$ — одна из точек искомого геометрического места точек. Опустим из точки M перпендикуляр MB на данную прямую y = 1 (рис. 3). Определим координаты точки B. Очевидно, что абсцисса точки B равна абсциссе точки M, а ордината точки B равна 1, т. е. $B(x;\ 1)$. По условию задачи $|AM|=|BM|$. Следовательно, для любой точки $M(x;y)$, принадлежащей искомому геометрическому месту точек, справедливо равенство:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-1)^2}, \text{ или}$$

$$(x-4)^2+y^2-6y+9=y^2-2y+1;$$

$$(x-4)^2=4y-8;\ y-2=\frac{1}{4}(x-4)^2.$$

Полученное уравнение определяет параболу с вершиной в точке O'(4;2). Чтобы уравнение параболы привести к простейшему виду, положим $x-4=X$ и $y+2=Y$, тогда уравнение параболы принимает вид: $Y=\frac{1}{4}\cdot X^2$ (*).

Чтобы построить найденную кривую, перенесем начало координат в точку O'(4;2), построим новую систему координат $XO'Y$, оси которой соответствует параллельным осям *Ox* и *Oy*, и затем в этой новой системе построим параболу (*) (рис.3).

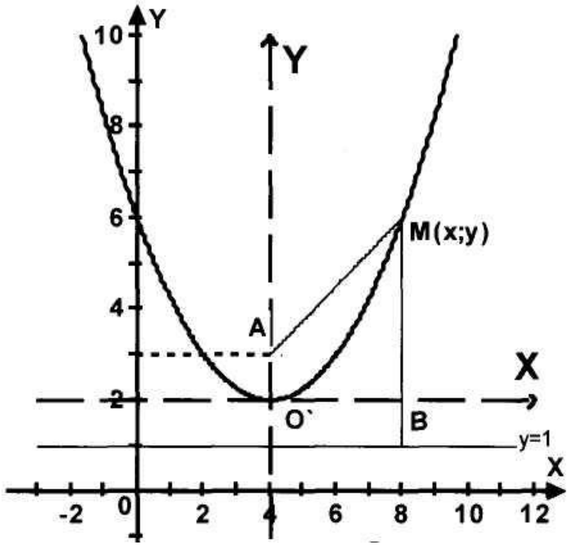


Рис. 3

Задача 4. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс, если она проходит через точки $A(-8;12)$ и $B(12;\ 8\sqrt{6})$. Найти все точки пересечения этой гиперболы с окружностью с центром в начале координат, если эта окружность проходит через фокусы гиперболы.

*Решение**:*** Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.6)$$

По условию точки *A* и *B* лежат на гиперболе. Следовательно, координаты этих точек удовлетворяют уравнению (2.6). Подставив в уравнение (2.6) вместо текущих координат *x* и *y* координаты точек *A* и *B,* получим систему двух уравнений относительно неизвестных a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{64}{a^2} - \dfrac{144}{b^2} = 1, \\ \dfrac{144}{a^2} - \dfrac{384}{d^2} = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{9}{b^2} = \dfrac{1}{16}, \\ \dfrac{3}{a^2} - \dfrac{8}{b^2} = \dfrac{1}{48}. \end{cases}$$

Решая систему, получаем: $a^2 = 16$, $b^2 = 48$. Таким образом, уравнение искомой гиперболы $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{48} = 1$. Определим фокусы этой гиперболы. Имеем $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 48 = 64$, тогда $F_1\ -8;\ 0$, $F_2\ 8;\ 0$.

Уравнение окружности, проходящей через начало координат, имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$, где R – радиус окружности. Чтобы найти точки пересечения гиперболы с окружностью, решим систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{48} = 1, \\ x^2 + y^2 = 64. \end{cases}$

В результате получим четыре точки пересечения: $M_1\ 2\sqrt{7};\ 6$, $M_2\ -2\sqrt{7};\ 6$, $M_3\ -2\sqrt{7};6$, $M_4\ 2\sqrt{7};\ \text{-}6$ (рис. 4).

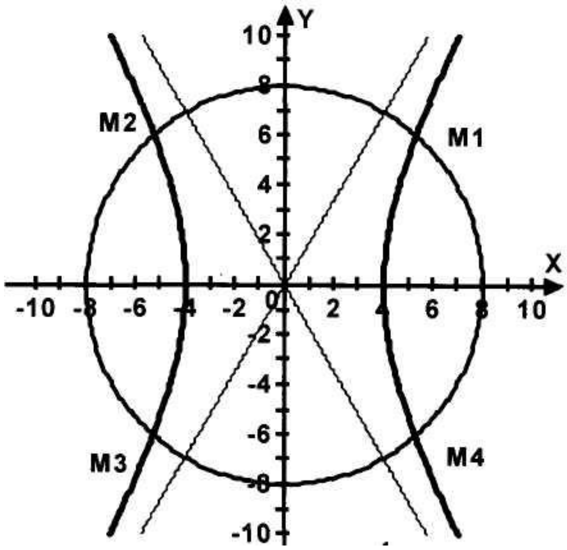


Рис. 4

Тема 2. Основы векторной алгебры

Задача 5. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$: $A(2;1;0)$, $B(3;-1;2)$, $C(13;3;10)$, $D(0;1;4)$. Требуется 1) записать векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в системе орт $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$; 3) найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$: 4) найти площадь грани ABC; 5) найти объем пирамиды $ABCD$.

Решение:

1. Произвольный вектор $\overline{a}$ может быть представлен в системе орт $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ следующей формулой:

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}, \tag{2.7}$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси *Ox, Oy, Oz*, а $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ - единичные векторы, направления которых совпадают с положительным направлением осей *Ox, Oy, Oz*.

Если даны точки $M_1\ x_1, y_1, z_1$, $M_2\ x_2, y_2, z_2$, то проекции вектора $\overline{a} = \overline{M_1M_2}$ на координатные оси находятся по формулам:

$$a_x = x_2 - x_1,\ a_y = y_2 - y_1,\ a_z = z_2 - z_1. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\overline{M_1M_2} = \ x_1 - x_1\ \overline{i} + \ y_2 - y_1\ \overline{j} + \ z_2 - z_1\ \overline{k}. \tag{2.9}$$

Подставив в (2.9) координаты точек *A* и *B*, получим вектор $\overline{AB}$.

$$\overline{AB} = \ 3-2\ \overline{i} + \ -1-1\ \overline{j} + \ 2-0\ \overline{k} = \overline{i} - 2\overline{j} + 2\overline{k}.$$

Аналогично, подставляя в (2.9) координаты точек *A* и *C*, находим

$$\overline{AC} = 11\overline{i} + 2\overline{j} + 10\overline{k}.$$

Подставив в (2.9) координаты точек *A* и *D*, находим вектор $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = -2\overline{i} + 4\overline{k}.$$

Если вектор $\overline{a}$ задан формулой (2.7), то его модуль вычисляется по формуле

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2.10}$$

Применяя (2.10), получим модули найденных векторов $\left|\overline{AB}\right| = 3$, $\left|\overline{AC}\right| = 15$, $\left|\overline{AD}\right| = 2\sqrt{5}$.

2. Косинус угла между двумя векторами равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их модулей:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}.$$

Находим скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ по формуле:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Получаем $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 1 \cdot 11 + \ -2\ \cdot 2 + 2 \cdot 10 = 27$.

Модули этих векторов уже найдены: $\left|\overline{AB}\right| = 3$, $\left|\overline{AC}\right| = 15$. Следовательно, $\cos\angle A = \dfrac{27}{3 \cdot 15} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$; $\angle A = 53^0 8'$.

3. Проекция вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$ равна скалярному произведению этих векторов, деленному на модуль вектора $\overline{AB}$:

$$\text{пр}_{\overline{AB}}\overline{AD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|}=\frac{1\cdot(-2)+(-2)\cdot 0+2\cdot 4}{3}=2.$$

4. Площадь грани ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, равна модулю векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Вычислим векторное произведение по формуле: $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$. Тогда

$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -2 & 2\\ 11 & 2 & 10\end{vmatrix}=-24\overline{i}+12\overline{j}+24\overline{k}$; по формуле

$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-24)^2+12^2+24^2}=36$, значит $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 36=18$ *кв.ед.*

5. Объем параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, равен абсолютной величине их смешанного произведения. Вычислим смешанное произведение $\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}$ по формуле:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.\ \text{Тогда}\ \left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ 11 & 2 & 10\\ -2 & 0 & 4\end{vmatrix}=144.$$

Следовательно, объем параллелепипеда равен 144 *куб. ед.*, а объем заданной пирамиды *ABCD*: $v_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot 144=24$ *куб. ед.*

Тема 3. Элементы аналитической геометрии в пространстве

Задача 6. Даны координаты четырех точек: *A* (0; -2; -1), *B*(2; 4; -2), *C*(3; 2; 0) и *M*(-11; 8; 10). Требуется: 1) составить уравнение плоскости *Q*, проходящей через точки *A*, *B* и *C*; 2) составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку *M* перпендикулярно плоскости *Q*; 3) найти точки пересечения полученной прямой с плоскостью *Q* и с координатными плоскостями *x*O*y*, *x*O*z* и *y*O*z*; 4) найти расстояние от точки *M* до плоскости *Q*.

Решение: 1) Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0. \qquad (2.11)$$

Подставив в (2.11) координаты точек *A*, *B* и *C*, получим:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y+2 & z+1 \\ 2-0 & 4+2 & -2+1 \\ 3-0 & 2+2 & 0+1 \end{vmatrix}=0; \qquad \begin{vmatrix} x & y+2 & z+1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$10x-5(y+2)-10(z+1)=0$.

Сократив на 5, получим уравнение искомой плоскости Q:

$$2x-y-2z-4=0 \quad (Q). \tag{2.12}$$

2. Канонические уравнения прямой в пространстве имеют вид

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \tag{2.13}$$

где x_0, y_0, z_0 — координаты точки, через которую проходит прямая (2.13), а m, n и p — координаты направляющего вектора прямой. По условию прямая проходит через точку M(-11; 8; 10) и перпендикулярна плоскости Q. Следовательно, подставив в (2.13) координаты точки M и, заменив числа m, n и p соответственно числами 2; -1; -2 [коэффициенты общего уравнения плоскости (2.12)], получим

$$\frac{x+11}{2}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-10}{-2}. \tag{2.14}$$

3. Чтобы найти точки пересечения прямой (2.14) с плоскостью (2.12), запишем сначала уравнения прямой (2.14) в параметрическом виде.

Пусть

$$\frac{x+11}{2}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-10}{-2}=t,$$

где t — некоторый параметр. Тогда уравнения прямой можно записать так:

$$\begin{cases} x=2t-11, \\ y=-t+8, \\ z=-2t+10. \end{cases} \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) в (2.12), получим значение параметра t:

$2(2t-11)-(-t+8)-2(-2t+10)-4=0$;

$4t-22+t-8+4t-20-4=0$; $\qquad 9t-54=0$; $\qquad t=6$.

Подставив в (2.15) t=6, находим координаты точки P пересечения прямой (2.14) с плоскостью (2.12):

x=1, y=2, z=-2, тогда P(1; 2; -2).

Пусть P_1 — точка пересечения прямой (2.14) с координатной плоскостью xOy; уравнение этой плоскости z = 0. При z = 0 из (2.15) получаем

$t=5$; $\quad x=-1$; $\qquad y=3$; $P_1(-1;\ 3;\ 0)$.

Пусть P_2 — точка пересечения прямой (2.14) с плоскостью xOz; уравнение этой плоскости y=0. При y=0 из (2.15) получаем

t=8; x=5; z=-6; P_2(5; 0; -6).

Пусть P_3 — точка пересечения прямой (2.14) с плоскостью yOz

Уравнение этой плоскости $x = 0$. При $x = 0$ из (2.15) получаем

$t=5{,}5$; $y=2{,}5$; $\quad z=-1$; $\quad P_3\ 0;\ 5{,}5;\ -1$.

4. Так как точка M лежит на прямой (2.14), которая перпендикулярна плоскости Q и пересекается с ней в точке P, то для нахождения расстояния от точки M до плоскости Q достаточно найти расстояние между точками M и P:

$$|MP|=\sqrt{\ 1+11\ ^2+\ 2-8\ ^2+\ -2-10\ ^2}=18.$$

Задача 7. Даны координаты трех точек: A (-5; 2; -2), B (-1; 4; -6), C(-4; 1;-6). Требуется найти: 1) канонические уравнения прямой AB; уравнение плоскости, проходящей через точку C перпендикулярно прямой AB и точку пересечения этой плоскости с прямой AB; расстояние от точки C до прямой AB.

Решение.

1. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $A(x_x;y_x;z_x)$ $B(x_2;y_2;z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}-\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{2.16}$$

Подставив в (2.16) координаты точек A и B, получим

$$\frac{x+5}{-1+5}=\frac{y-2}{4-2}=\frac{z+2}{-6+2};\quad \frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-4};\quad \frac{x+5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-2}\ (AB).$$

2. Запишем уравнение плоскости в общем виде $Ax+By+Cz+D = 0$. Если плоскость проходит через точку $M_Q(x_Q;\ y_Q;\ z_0)$, то уравнение пучка плоскостей имеет вид

$$A(x\text{-}x_0\ )+\mathrm{B}(y\text{-}y_0\ )+C(z\text{-}z_0\ )=0.$$

Так как искомая плоскость перпендикулярна прямой AB, то A:B:C = =2:1:(-2). Заменив коэффициенты A, B и C в уравнении пучка плоскостей соответственно числами 2, 1, -2 и подставляя координаты точки C(-4; 1; -6), получим

$$2\ x+4\ +1\ y-1\ -2\ z+6\ =0;\ 2x+y-2z-5=0 \qquad \Theta.$$

Определим координаты точки пересечения плоскости Θ с прямой AB. Для этого решим систему трех уравнений

$$\begin{cases} 2x+y-2z-5=0; \\ \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{z-2}{1}; \\ \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{z+2}{-2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим x = -3, y = 3, z = -4. Следовательно, плоскость и прямая пересекаются в точке P(-3; 3; -4).

3. Чтобы найти расстояние от точки C до прямой AB, достаточно найти расстояние от точки C (-4; 1; -6) до точки пересечения P (-3; 3; -4) (так как прямая AB перпендикулярна плоскости Θ).

Имеем $\left|CP\right|=\sqrt{\;-3+4\;^{2}+\;3-1\;^{2}+\;-4+6\;^{2}}=3.$

Тема 4. Элементы линейной алгебры

Задача 8. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=2,\\ 5x_1-8x_2+2x_3=-12,.\\ 3x_1+x_2+3x_3=4. \end{cases}$$

а)методом Гаусса; б) с помощью определителей; в) с помощью обратной матрицы.

Решение.

а) Исключим из последних двух уравнений x_1. Для этого умножим первое уравнение на (-5) и результаты прибавим соответственно ко второму уравнению, затем обе части первого уравнения умножим на (-3) и результаты прибавим к третьему уравнению. В результате получим систему, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=2,\\ \qquad 2x_2-8x_3=-22,\\ \qquad 7x_2-3x_3=-2. \end{cases} \tag{2.17}$$

Разделив обе части второго уравнения системы (2.17) на 2, получим систему

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=2,\\ \qquad x_2-4x_3=-11,\\ \qquad 7x_2-3x_3=-2. \end{cases} \tag{2.18}$$

Теперь исключим из третьего уравнения системы (2.18) переменную x_2. Для этого обе части второго уравнения этой системы умножим на (-7) и результаты прибавим к третьему уравнению. В результате получим систему

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=2,\\ \qquad x_2-4x_3=-11,\\ \qquad\quad 25x_3=75. \end{cases} \tag{2.19}$$

Откуда x_3 = 3, x_2 = 1 и x_1 = -2. Приведение данной системы к ступенчатому виду (1.19) практически более удобно, если использовать преобразования расширенной матрицы данной системы, т. е. матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных и свободных членов. Для удобства столбец свободных членов этой матрицы отделим вертикальной чертой. Расширенная матрица данной системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1\\ 5 & -8 & 2 & -12\\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Умножим элементы первой строки матрицы на (-5) и результаты прибавим к элементам второй строки, затем умножим элементы первой строки на (-3) и результаты прибавим к элементам третьей строки. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Разделив элементы второй строки на 2, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 7 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Элементы второй строки умножим на (-7) и результаты прибавим к элементам третьей строки. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 25 & 75 \end{array}\right),$$

которая позволяет данную систему привести к виду (3) и затем решить ее.

б) Составим и вычислим следующие определители системы. Определитель *А*, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \ -2 \ \cdot \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \ -8 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \ + 2 \cdot \ 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \ +$$

$$+2 \cdot \ 5 \cdot 1 - 3 \cdot \ -8 \ \ = 50.$$

Аналогично вычисляем Δ_1, полученный из Δ заменой первого столбца столбцом свободных коэффициентов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -12 & -8 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -100, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & -12 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 50 \text{ и } \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -8 & -12 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 150.$$

Тогда решения системы найдем по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-100}{50} = -2, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{50}{50} = 1, \ \Delta_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}\frac{150}{50} = 3.$$

в) Введем обозначения: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ 4 \end{pmatrix}$. Тогда систему уравнений можно представить в виде матричного уравнения $A \cdot X = B$, которое решим по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$. Найдем A^{-1} по следующему алгоритму.

1) $\Delta = \det \ A \ = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 50.$

2) Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A по формуле: $A_{ij} = -1^{\,i+j} M_{ij}$, где M_{ij} - определитель, полученный из Δ путем вычеркивания i-той строки и j-го столбца,

$$A_{11} = -1^{\,1+1} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1^{\,2} \; -8\cdot 3 - 1\cdot 2 \; = -26.$$

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения.

$$A_{12} = -1^{\,1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{13} = -1^{\,1+3} \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 29, \qquad A_{21} = -1^{\,2+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{22} = -1^{\,2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -1^{\,2+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{31} = -1^{\,3+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

$$A_{32} = -1^{\,3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{33} = -1^{\,3+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 2,$$

3) Из найденных дополнений составим матрицу: $A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$,

получаем $A^T = \begin{pmatrix} -26 & 8 & 12 \\ -9 & -3 & 8 \\ 29 & -7 & 2 \end{pmatrix}$.

4) Обратную матрицу получаем по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} A^T$, т.е. $A^{-1} = \dfrac{1}{50} \begin{pmatrix} -26 & 8 & 12 \\ -9 & -3 & 8 \\ 29 & -7 & 2 \end{pmatrix}$.

5) Выполним проверку, покажем, что $A^{-1}\cdot A = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица.

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -26 & 8 & 12 \\ -9 & -3 & 8 \\ 29 & -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & -8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} -26\cdot 1 + 8\cdot 5 + 12\cdot 3; & -26\cdot \; -2 \; + 8\cdot \; -8 \; + 12\cdot 1; & -26\cdot 2 + 8\cdot 2 + 12\cdot 3; \\ -9\cdot 1 + \; -3 \; \cdot 5 + 8\cdot 3; & -9\cdot \; -2 \; + \; -3 \; \cdot \; -8 \; + 8\cdot 1; & -9\cdot 2 + \; -3 \; \cdot 2 + 8\cdot 3; \\ 29\cdot 1 + \; -7 \; \cdot 5 + 2\cdot 3; & 29\cdot \; -2 \; + \; -7 \; \cdot \; -8 \; + 2\cdot 1; & 29\cdot 2 + \; -7 \; \cdot 2 + 2\cdot 3. \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}50 & 0 & 0\\ 0 & 50 & 0\\ 0 & 0 & 50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Теперь найдем решение матричного уравнения

$$X=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}-26 & 8 & 12\\ -9 & -3 & 8\\ 29 & -7 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -12\\ 4\end{pmatrix}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}-26\cdot 2+8\ -12\ +12\cdot 4\\ -9\cdot 2+\ -3\ \cdot\ -12\ +8\cdot 4\\ 29\cdot 2+\ 7\ \cdot\ -12\ +2\cdot 4\end{pmatrix}=\frac{1}{50}\begin{pmatrix}-100\\ 50\\ 150\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}.$$

Тогда решение системы: $x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=3$.

Задача 9. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3-2x_4=4,\\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=1,\\ 4x_1-2x_2-6x_3=2,\\ 5x_1+4x_2-5x_3+2x_4=1.\end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -2 & 4\\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1\\ 4 & -2 & -6 & 0 & 2\\ 5 & 4 & -5 & 2 & 1\end{array}\right).$$

Умножив элементы первой строки последовательно на -2, -4 и -5. полученные результаты прибавим соответственно к элементам второй, третьей и четвертой строк. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7\\ 0 & -6 & -10 & 8 & -14\\ 0 & -1 & -10 & 12 & -19\end{array}\right).$$

Элеметны второй строки умножим на 6 и результаты прибавим к элементам третьей строки, затем элементы второй строки прибавим к элементам четвертой строки. Получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7\\ 0 & 0 & -28 & 38 & -56\\ 0 & 0 & -13 & 17 & -26\end{array}\right).$$

Элементы третьей строки разделим на -2 и затем элементы четвертой строки прибавим к элементам третьей строки. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & \vline & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & \vline & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vline & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 17 & \vline & -26 \end{pmatrix}.$$

Теперь элементы третьей строки умножим на 13 и результаты прибавим к элементам четвертой строки. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & \vline & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & \vline & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vline & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & \vline & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, данную систему можно записать так:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ \qquad x_2 - 3x_3 - 5x_4 = -7, \\ \qquad\qquad x_3 - 2x_4 = 2, \\ \qquad\qquad\quad -9x_4 = 0. \end{cases}$$

Откуда $x_4 = 0$, $x_3 = 2$, $x_2 = -1$ и $x_1 = 3$.

Тема 5. Введение в анализ

Задача 10. Найти указанные пределы:

а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{3x^2-5x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x+1}$; е) $\lim\limits_{x\to2}\ 3x-5^{\frac{4}{x-2}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Решение: а) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=2 приводит к неопределенности вида 0/0, чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель (x-2). Так как аргумент x только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним, то множитель (x-2) отличен от нуля при $x\to2$:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{3x^2-5x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2\quad x+3}{3x+1\quad x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x+3}{3x+1}=\frac{5}{7}.$$

б) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=1 приводит к неопределенности вида 0/0, чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель (x-l). Так как аргумент x только стремится к своему предельному значению 1, но не совпадает с ним, то множитель (x-1) отличен от нуля при $x \to 1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\_x^3 \quad +x-2 & \underline{\;x-1\;} \\
\;\; x^3-x^2 & x^2+x+2 \\
\hline
\quad \_x^2+x\; -2 & \\
\quad\; \underline{x^2-x} & \\
\qquad \_2x-2 & \\
\qquad\; \underline{2x-2} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{l|l}
\_x^3 \quad -x^2-x+1 & \underline{\;x-1\;} \\
\;\; x^3-x^2 & x^2+x+2 \\
\hline
\qquad\qquad \_\text{- x +1} & \\
\qquad\qquad\; \underline{\text{- x +1}} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

Имеем:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1\;\; x^2+x+2}{x-1\;\; x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x^2-1}=\frac{4}{0}=\infty .$$

в) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента x=0 приводит к неопределенности вида $0/0$, чтобы раскрыть эту неопределенность, домножим числитель и знаменатель на сопряженные выражения для числителя и знаменателя (чтобы применить формулу $a-b\;\cdot\;a+b\;=a^2-b^2$).

Тогда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1\;\;\sqrt{x^2+1}+1\;\;\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}-4\;\;\sqrt{x^2+16}+4\;\;\sqrt{x^2+16}+1}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}^{\;2}-1^2\right)\sqrt{x^2+16}+4}{\left(\sqrt{x^2+16}^{\;2}-4^2\right)\sqrt{x^2+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1\;\;\sqrt{x^2+16}+4}{x^2+16-16\;\;\sqrt{x^2+1}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\;\;\sqrt{x^2+16}+4}{x^2\;\;\sqrt{x^2+1}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{\sqrt{0^2+16}+4}{\sqrt{0^2+1}+1}=\frac{8}{2}=4 .$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\cdot\dfrac{x}{2}}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}.$

Использовали первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

Искомый предел можно найти иначе. Известно, что при нахождении предела отношения двух бесконечно малых величин можно каждую из них (или только одну) заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, так, при $x\to 0\;\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

д) $x\to\infty$ основные степени $\frac{3x-1}{3x+4}$ стремится к 1, а показатель степени $2x+1$ стремится к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида 1^∞. Представим основание в виде суммы 1 и некоторой бесконечно малой величины:

$$\frac{3x-1}{3x+4}=\frac{3x+4-5}{3x+4}=1+\frac{-5}{3x+4}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x+4}\right)^{2x+1}.$$

Положим $3x+4=-5y$, при $x\to\infty$ переменная $y\to-\infty$. Выразим показатель степени через новую переменную *y*. Так как $3x=-5y-4$, то $2x+1=-\frac{10}{3}y-7$. Таким образом,

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{-5}{-5y}\right)^{-\frac{10}{3}y-7}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{10}{3}y-7}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-\frac{10}{3}}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-7}=$$

$$=e^{-\frac{10}{3}}\cdot 1^{-7}=e^{-\frac{10}{3}}.$$

(Используем второй замечательный предел).

Другой способ.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x+4}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x+4}\right)^{\frac{3x+4}{-5}\cdot\frac{-5}{3x+4}\cdot\ 2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-10x-5}{3x+4}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{x\cdot\left(-10-\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\left(3+\frac{4}{x}\right)}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-10-\frac{5}{x}}{3+\frac{4}{x}}}=e^{\frac{-10-\frac{5}{\infty}}{3+\frac{4}{\infty}}}=e^{\frac{-10-0}{3+0}}=e^{-\frac{10}{3}}.$$

е) При $x\to 2$ основание $3x-5$ стремится к единице, а показатель степени $\frac{4}{x-2}$ стремится к бесконечности.

$$\lim_{x\to 2}\ 3x-5^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\ 1+\ 3x-5-1^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{x\to 2}\ 1+\ 3x-6^{\frac{1}{3x-6}\cdot\frac{3x-6}{1}\cdot\frac{4}{x-2}}=\lim_{x\to 2}e^{\frac{3\ x-2\ \cdot 4}{x-2}}=e^{12}.$$

ж) При подстановке предельного значения $x=\infty$ приходим к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель дроби на x^4, т.к. четвертая степень является самой большой степенью дроби.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^4}+\frac{x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0\,.$$

Тема 6. Производная функции одной переменной

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач, однако нет необходимости каждый раз находить производную путем предельного перехода, посредством тех четырех операций, которые указаны в правиле нахождения производной функции.

Практически, производные элементарных функций находятся по следующим формулам дифференцирования.

1 $c\ '=0,$

2 $u+v-w\ '=u'+v'-w',$

3 $u\cdot v\ '=u'v+uv',$ 3а) $c\cdot u\ '=c\cdot u',$

4 $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$ 4а) $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c},$ 4б) $\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{-cv'}{v^2},$

5 $x^n\ '=nx^{n-1},$

6 $\sin x\ '=\cos x,$

7 $\cos x\ '=-\sin x,$

8 $tgx\ '=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$

9 $ctgx\ '=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x,$

где c – постоянная, x – независимая переменная; u, v, w – функции от x.

Задача 11. Пользуясь формулами дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x}+\frac{1}{4x^5},$

б) $y=x^2\cos x,$

в) $y=\frac{x^2}{x^2+1},$

г) $y=\frac{\cos x\cdot ctgx}{1+2tgx}.$

Решение.

а) Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию

$$y = x^{\frac{1}{2}} + 5\cdot x^{\frac{-2}{3}} - x^{-1} + \frac{1}{4}\cdot x^{-5}.$$

Применяя формулы 2, 5, 3а, получим:

$$y' = \frac{1}{2}\cdot x^{+\frac{1}{2}-1} + 5\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1} - (-1)\,x^{-1-1} + \frac{1}{4}\cdot(-5)\cdot x^{-5-1} =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{5}{3}} + x^{-2} - \frac{5}{4}x^{-6} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{10}{3\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{4\cdot x^6}.$$

б) Пользуясь формулой 3, получим:

$$y' = (x^2)'\cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cdot\cos x + x^2(-\sin x) = 2x\cdot\cos x - x^2\sin x.$$

в) Пользуясь формулой 4, получим:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^2+1) - x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - x^2 2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

г) Пользуясь формулами 3 и 4, получим:

$$y' = \left(\frac{\cos x\cdot ctgx}{1+2tgx}\right)' = \frac{(\cos x\cdot ctgx)'\cdot(1+2tgx) - \cos x\cdot ctgx\,(1+2tgx)'}{(1+2tgx)^2} =$$

$$= \frac{\left((\cos x)'\cdot ctgx + \cos x\,(ctgx)'\right)\cdot(1+2tgx) - \cos x\cdot ctgx\cdot 2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+2tgx)^2} =$$

$$= \frac{\left(-\sin\cdot\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\cdot(1+2tgx) - \frac{2}{\sin x}}{(1+2tgx)^2} = \frac{\left(-\cos x - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)\cdot(1+2tgx) - \frac{2}{\sin x}}{(1+2tgx)^2}.$$

Производная сложной функции

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т.е. если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется сложной функцией от x.

Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y' = f'(u)\cdot u'(x).$$

Так, если $u=\varphi(x)$, то формулы 5, 6, 7, 8, 9 предыдущего параграфа будут иметь следующий вид:

5 $(u^n)' = nu^{n-1}\cdot u'$;

6 $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7 $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8 $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u' = \sec^2 u \cdot u'$;

9 $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u' = \operatorname{cosec}^2 u \cdot u'$.

Полезно запомнить словесные выражения формул дифференцирования:

- производная степени равна показателю, умноженному на то же основание с показателем на единицу меньше и на производную основания;

- производная синуса равна косинусу того же аргумента, умноженному на производную от аргумента, и т.д.

Задача 12. Найти производную следующих функций:

а) $y = (3x^2 + 2x)^4$;

б) $y = \sin 3x$;

в) $y = \cos^2 x$;

г) $y = tg^3(4x+1)$.

Решение.

а) Полагая $y = u^4$, где $u = 3x^2 + 2x$, применим правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{dy}{du} = 4u^3;\quad \frac{du}{dx} = 6x+2;\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 4u^3\cdot(6x+2) = 4(3x^2+2x)^3(6x+2).$$

б) $y = \sin 3x$. Полагая $u = 3x$ и пользуясь формулами 6 и 3а), получим

$$y' = (\sin 3x)' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos 3x \cdot 3.$$

в) Полагая $u = \cos x$ и применяя формулы 5 и 8, имеем

$$y' = (\cos^2 x)' = (u^2)' = 2u\cdot u' = 2\cos x\cdot(-\sin x) = -\sin 2x.$$

г) $y = tg^3(4x+1)$. Полагая $u = tg(4x+1)$ и применяя формулы 5 и 8, имеем

$$y' = \left(tg^3(4x+1)\right)' = (u^3)' = 3u^2\cdot u' = 3tg^2(4x+1)\cdot\left(tg(4x+1)\right)'.$$

Найдем $\left(tg(4x+1)\right)'$, полагая $u = 4x+1$ и применяя формулу 8, имеем

$$\left(tg(4x+1)\right)' = (tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u' = \frac{1}{\cos^2(4x+1)}\cdot 4,$$

тогда

$$y' = 3tg^2(4x+1)\cdot\frac{1}{\cos^2(4x+1)}\cdot 4 = \frac{12tg^2(4x+1)}{\cos^2(4x+1)}.$$

Производные показательных и логарифмических функций

Общие формулы и их частные виды:

10 $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

10а) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

10б) $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$;

10в) $(e^x)' = e^x$;

11 $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u} \cdot \log_a e$;

11а) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

11б) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x} \log_a e$;

11в) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Для дифференцирования логарифмической функции с основанием $a \neq e$ можно предварительно преобразовать ее в логарифмическую функцию с основанием e по формуле

$$\log_a u = \log_a e \cdot \ln u.$$

Задача 13. Найти производную следующих функций:

а) $y = x^5 \cdot 4^x$.

б) $f(x) = \sqrt[x]{3} + \dfrac{1}{2^{5x}} + 6^{\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$.

в) $y = \ln \sin 2x$.

г) $y = \ln \dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$.

д) $y = \ln \sqrt{\dfrac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$; вычислить $f'(0)$.

Решение.

а) Дифференцируем как произведение и по формулам 5 и 10б).

$$y' = (x^5 \cdot 4^x)' = (x^5)' \cdot 4^x + x^5 (4^x)' = 5x^4 \cdot 4^x + x^5 \cdot 4^x \cdot \ln 4 = x^4 \cdot 4^x (5 + x \cdot \ln 4).$$

б) Вводим дробные и отрицательные показатели, затем дифференцируем как сумму и по формуле 10

$$f'(x)=\left(3^{\frac{1}{x}}+2^{-5x}+6^{x^{\frac{1}{2}}}\right)'=3^{\frac{1}{x}}\ln 3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'+2^{-5x}\ln 2\,(-5x)'+6^{x^{\frac{1}{2}}}\ln 6\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=$$

$$=-\frac{3^{\frac{1}{x}}\ln 3}{x^2}-5\cdot 2^{-5x}\ln 2+\frac{6^{x^{\frac{1}{2}}}\ln 6}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(1)=-\frac{3\ln 3}{1^2}-5\cdot 2^{-5}\ln 2+\frac{6^1\ln 6}{2}=-3\ln 3-\frac{5}{32}.\ln 2+3\ln 6=$$

$$=-3\ln 3-\frac{5}{32}\cdot\ln 2+3\ln 3\cdot 2=--3\ln 3-\frac{5}{32}\cdot\ln 2+3\ln 3+3\ln 2=$$

$$=-\frac{5}{32}\cdot\ln 2+3\ln 2=\ln 2\left(-\frac{5}{32}+3\right)=\ln 2\frac{-5+96}{32}=\frac{91}{32}\ln 2.$$

в) Согласно формулам 11а) и 7а) имеем:

$$y'=(\ln\sin 2x)'=\frac{1}{\sin 2x}\cdot(\sin 2x)'=\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=2ctg2x.$$

г) Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем логарифм дроби в разность логарифмов числителя и знаменателя.

$$y=\ln\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}=\ln(a-x^2)-\ln(a+x^2).$$

Затем применим формулу 11а)

$$y'=\frac{(a^2-x^2)'}{a^2-x^2}-\frac{(a^2+x^2)'}{a^2+x^2}=\frac{-2x}{a^2-x^2}-\frac{2x}{a^2+x^2}=\frac{-2x\,(a^2+x^2+a^2-x^2)}{a^4-x^4}=$$

$$=\frac{-2x\cdot 2a^2}{a^4-x^4}=-\frac{4a^2x}{a^4-x^4}.$$

д) Преобразуем функцию

$$y=\ln\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}=\ln\left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\ln e^{3x}-\ln(1+e^{3x})\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(3x\underbrace{\ln e}_{1}-\ln(1+e^{3x})\right).$$

$$y'=\frac{1}{2}\left(3x-\ln(1+e^{3x})\right)'=\frac{1}{2}\left(3-\frac{(1+e^{3x})'}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3\cdot(1+e^{3x})-3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+3e^{3x}-3e^{3x}}{1+e^{3x}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1+e^{3x}};$$

$$y'(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1+e^0}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}.$$

Производные обратных тригонометрических функций

Общие формулы и их частные виды:

12 $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 12а) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13 $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 13а) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14 $\left(arctgu\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$; 14а) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

15 $\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$; 15а) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

Задача 14. Найти производную следующих функций:

а) $y = 3\arcsin\left(4x+1\right) - \arccos\left(4x+1\right)$;

б) $y = 2arctg^3x$;

в) $y = arcctg\left(\sin x\right)$.

Решение.

а) Применяя формулы 12 и 15, имеем:

$$y' = \left(3\arcsin\left(4x+1\right) - \arccos\left(4x+1\right)\right)' = 3\left(\arcsin\left(4x+1\right)\right)' -$$

$$-\left(\arccos\left(4x+1\right)\right)' = 3\cdot\frac{\left(4x+1\right)'}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}} - \left(-\frac{\left(4x+1\right)'}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}}\right) =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}} + \frac{4}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}} = \frac{16}{\sqrt{1-\left(4x+1\right)^2}}.$$

б) Применяя формулы 14а) и 5, имеем:

$$y' = \left(2arctg^3x\right)' = 2\cdot 3arctg^2x\cdot\left(arctgx\right)' = \frac{6arctg^2x}{1+x^2}.$$

в) Применяя формулу 15, получим:

$$y' = \left(arcctg\left(\sin x\right)\right)' = -\frac{\left(\sin x\right)'}{1+\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Дифференцирование многих функций значительно упрощается, если их предварительно прологарифмировать.

Если требуется найти *y'* из уравнения *y=f(x)*, то можно:

1) логарифмировать обе части уравнения (по основанию *e*): $\ln y = \ln f(x) = \phi(x)$;

2) дифференцировать обе части полученного равенства, где *lny* есть

сложная функция от x: $\dfrac{y'}{y}=\phi'(x)$;

3) заменить y выражением через x и определить y': $y'=y\cdot\phi'(x)=f(x)\cdot\phi'(x)$.

Логарифмическое дифференцирование полезно применять, когда заданная функция содержит логарифмирующиеся операции (умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня) и, в частности, для нахождения производной от показательно-степенной функции $y=u^v$, где u, v – функции от x.

Задача 15. Найти производную следующих функций:

а) $y=x^{x^2+1}$;

б) $y=(\cos x)^{\sin 2x}$;

в) $y=\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$;

г) $y=(x+2)\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2(x+4)}$.

Решение. Применяя логарифмическое дифференцирование, находим:

а) $y=x^{x^2+1}$.

1) $\ln y=\ln x^{x^2+1}$;

$\ln y=(x^2+1)\cdot\ln x$;

2) $\dfrac{y'}{y}=(x^2+1)'\cdot\ln x+(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}=2\ln x+\dfrac{x^2+1}{x}$;

3) $y'=y\left(2x\ln x+\dfrac{x^2+1}{x}\right)=x^{x^2+1}\left(2x\ln x+\dfrac{x^2+1}{x}\right)$.

б) $y=(\cos x)^{\sin 2x}$.

1) $\ln y=\ln(\cos x)^{\sin 2x}$;

$\ln y=\sin 2x\cdot\ln(\cos x)$;

2) $\dfrac{y'}{y}=(\sin 2x)'\cdot\ln(\cos x)+\sin 2x\cdot\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=2\cos 2x\cdot\ln(\cos x)-\dfrac{\sin 2x\cdot\sin x}{\cos x}$;

3) $y'=y\cdot\left(2\cos 2x\cdot\ln(\cos x)-\dfrac{2\sin^2 x\cdot\cos x}{\cos x}\right)=(\cos x)^{\sin 2x}\times$

$\times\left(2\cos 2x\cdot\ln(\cos x)-2\sin^2 x\right)$.

в) $y=\dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$.

1) $\ln y = \ln \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}$;

$\ln y = \ln\left(2x^2\right) - \ln\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}}$;

$\ln y = \ln\left(2x^2\right) - \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^3\right)$.

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{\left(2x^2\right)'}{2x^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\left(1+x^3\right)'}{1+x^3} = \dfrac{4x}{2x^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3x^2}{1+x^3} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{1+x^3}$.

3) $y' = y\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{1+x^3}\right) = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1+x^3}}\cdot\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{1+x^3}\right)$.

г) $y = (x+2)\sqrt[3]{(x-1)^2(x+4)}$.

1) $\ln y = \ln\left((x+2)\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\sqrt[3]{x+4}\right)$;

$\ln y = \ln(x+2) + \ln\sqrt[3]{(x+1)^2} + \ln\sqrt[3]{x+4}$;

$\ln y = \ln(x+2) + \dfrac{2}{3}\ln(x+1) + \dfrac{1}{3}\ln(x+4)$.

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{(x+2)'}{x+2} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(x-1)'}{x-1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{(x+4)'}{x+4} = \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+4}$.

3) $y' = y\left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{3(x-1)} + \dfrac{1}{3(x+4)}\right) = (x+2)\sqrt[3]{(x-1)^2(x+4)}\ \times$

$\times\left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{2}{3(x-1)} + \dfrac{1}{3(x+4)}\right)$.

Тема 7. Общая схема исследования функции и построение графика

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной или нечетной.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти точки экстремума и интервалы возрастания, убывания функции.
6. Найти точки перегиба графика функции и интервалы выпуклости вверх и вниз.
7. Построить график функции, используя все полученные результаты.

Задача 16. Исследовать функцию и построить ее график: а) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$;

б) $y = x\cdot e^{-x^2}$.

Решение.

а) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.

1) Область определения функции $(-\infty;-1)\bigcup(-1;1)\bigcup(1;+\infty)$.

2) Точки пересечения с осью *OX*

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{x}{1-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad O(0;0).$$

Точки пересечения с осью *OY*

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{x}{1-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad O(0;0).$$

3) $y(-x)=\dfrac{-x}{1-(-x)^2}=\dfrac{-x}{1-x^2}=-y(x)$.

Т.к. *y (-x) = -y (x),* то функция является нечетной. График функции симметричен относительно начала координат.

4) Асимптоты

Найдем вертикальные асимптоты.

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{2\cdot(-0)}=\frac{1}{+0}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to-1+0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{2\cdot(+0)}=\frac{-1}{+0}=-\infty$$

Значит, x=-1 есть вертикальная асимптота.

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to1-0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{(+0)\cdot 2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to1+0}\frac{x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{(-0)\cdot 2}=-\infty$$

x=1 – есть вертикальная асимптота.

Наклонные асимптоты: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{(1-x^2)\cdot x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1-x^2}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$$

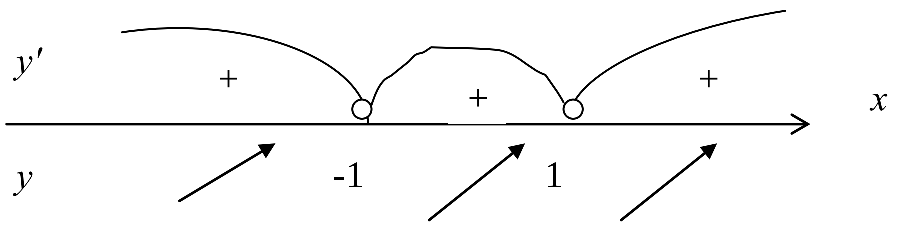
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{-2x}=\frac{1}{\infty}=0$$

y=0 – вертикальная асимптота.

5) Исследуем функцию на экстремум.

$$y'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{x'\cdot(1-x^2)-x\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2-x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$y'=0 \qquad \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}=0 \qquad \begin{cases}1+x^2=0\\(1-x^2)^2=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\text{нет решения}\\x_1\neq 1,\ x_2\neq -1\end{cases}$$



Функция возрастает на всей области определения. Экстремума не имеет.

6) Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости.

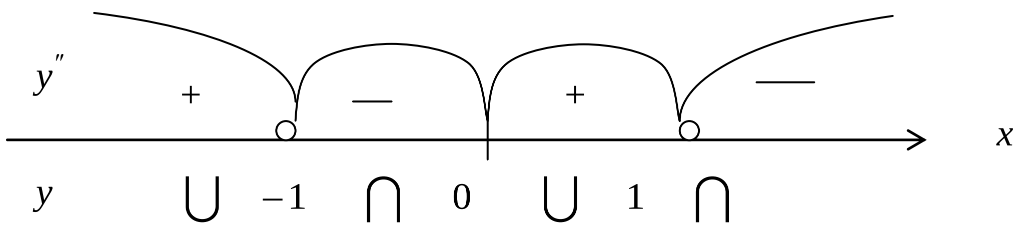
$$y''=\left(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{(1+x^2)'\cdot(1-x^2)^2-(1+x^2)\cdot((1-x^2)^2)'}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(1-x^2)^2-(1+x^2)\cdot 2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(1-x^2)(1-x^2+2(1+x^2))}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(1-x^2+2+2x^2)}{(1-x^2)^3}=\frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$$y''=0 \qquad \frac{2x(3+x^2)}{(1-x^2)^3}=0 \qquad \begin{cases}2x(3+x^2)=0\\(1-x^2)^3\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=0\ \text{или}\ 3+x^2=0\\x_1\neq 1,\ \ x_2\neq -1\end{cases} \qquad \begin{cases}x=0\\x_1\neq 1,\ x_2\neq -1\end{cases}$$

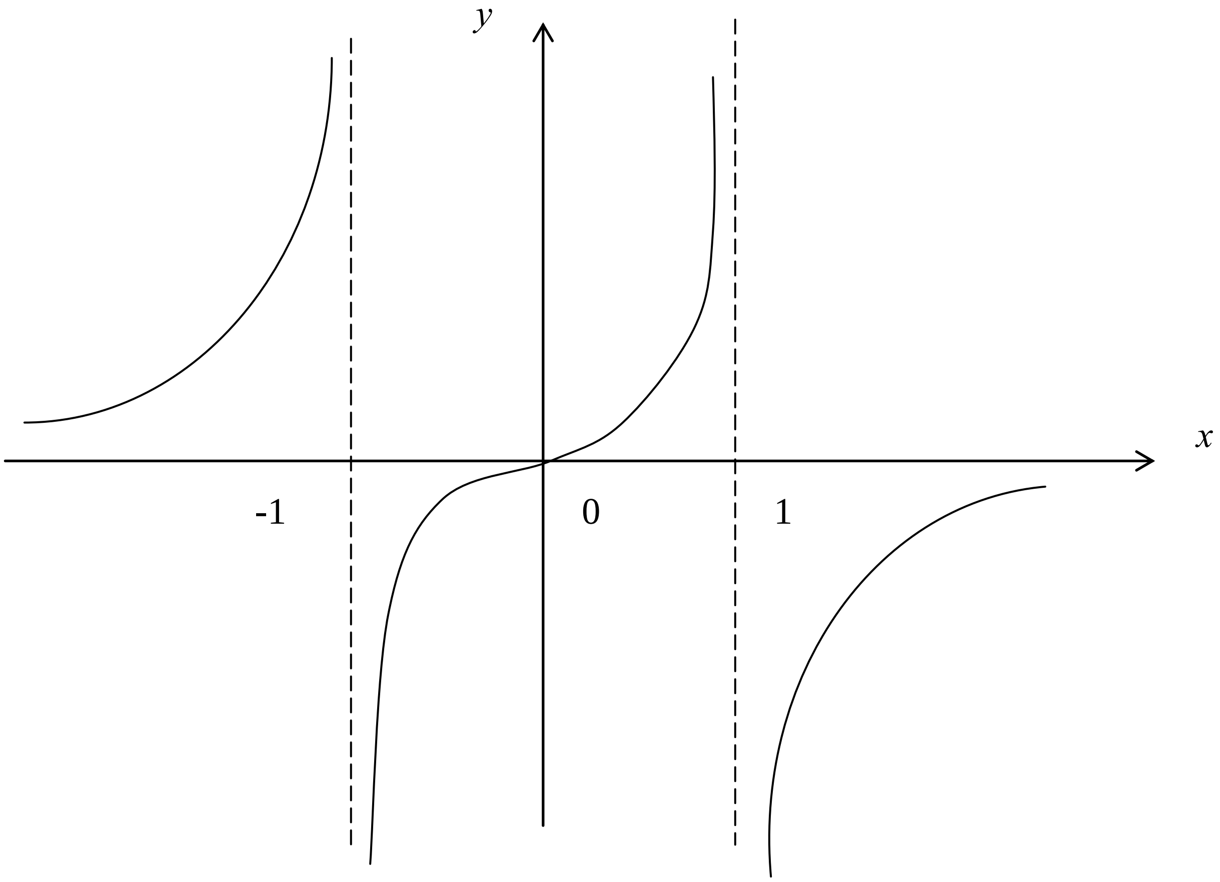


Функция выпукла вниз в интервале $(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

Функция выпукла вверх в интервале $(-1;0)\bigcup(1;+\infty)$.

Точкой перегиба является точка x=0, y (0) =0

7.



б) $y = x \cdot e^{-x^2}$.

1) Область определения функции $(-\infty;\ +\infty)$.

2) Точки пересечения с осью OX.

$\begin{cases} y = 0 \\ y = x \cdot e^{-x^2} \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $O(0;0)$

Точки пересечения с осью OY.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = x \cdot e^{-x^2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $O(0;0)$

3) Четность, нечетность функции.

$y(-x) = -x \cdot e^{-(-x)^2} = -x \cdot e^{-x^2} = -y(x)$

$y(-x) = -y(x)$ -функция является нечетной, график функции симметричен относительно начала координат.

4) Асимптоты.

а) Вертикальных асимптот нет.

б) Наклонные асимптоты находим в виде $y=kx+b$. В задании функции присутствует экспонента, но за счет ее четной степени пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ можно рассматривать вместе.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \cdot e^{-x^2}}{x} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot e^{-x^2} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y=0$ – есть горизонтальная асимптота.

5) Найдем интервалы возрастания, убывания, экстремум.

$$y' = \left(x \cdot e^{-x^2}\right)' = x' \cdot e^{-x^2} + x\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)$$

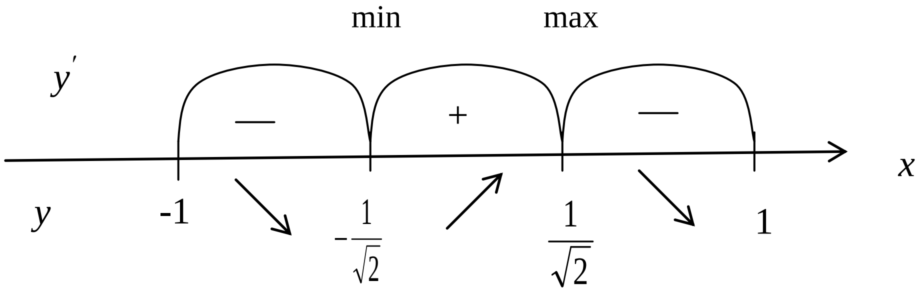
$$y' = 0, \quad e^{-x^2} \cdot \left(1 - 2x^2\right) = 0$$

$e^{-x^2} = 0$ или $1-2x^2=0$

нет $2x^2=1$

решения $x^2 = \frac{1}{2}$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0{,}7$$



На интервале $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \bigcup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$ функция убывает, на интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ функция возрастает.

В точке $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ минимум, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ максимум.

$$y_{\min}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2 \cdot e}} \approx -0{,}43$$

$$y_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot e}} \approx 0{,}43$$

6) Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости вниз и вверх.

$$y'' = \left(e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)\right)' = \left(e^{-x^2}\right)'\cdot\left(1-2x^2\right) + e^{-x^2}\cdot\left(1-2x^2\right)' = -2x\cdot e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) + e^{-x^2}\left(-4x\right) =$$
$$= -2x\cdot e^{-x^2}\left(1-2x^2+2\right) = -2x\cdot e^{-x^2}\cdot\left(3-2x^2\right)$$

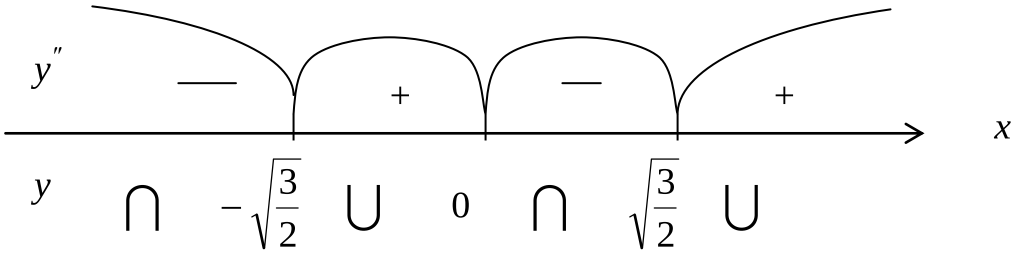
$$y''=0;\quad -2xe^{-x^2}\left(3-2x^2\right)=0$$

$$-2x=0 \text{ или } e^{-x^2}=0 \text{ или } 3-2x^2=0$$

$$2x^2=3$$

$$x_1=0, \text{ нет решений, } \qquad x^2=\frac{3}{2}$$

$$x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\approx\pm1{,}2$$



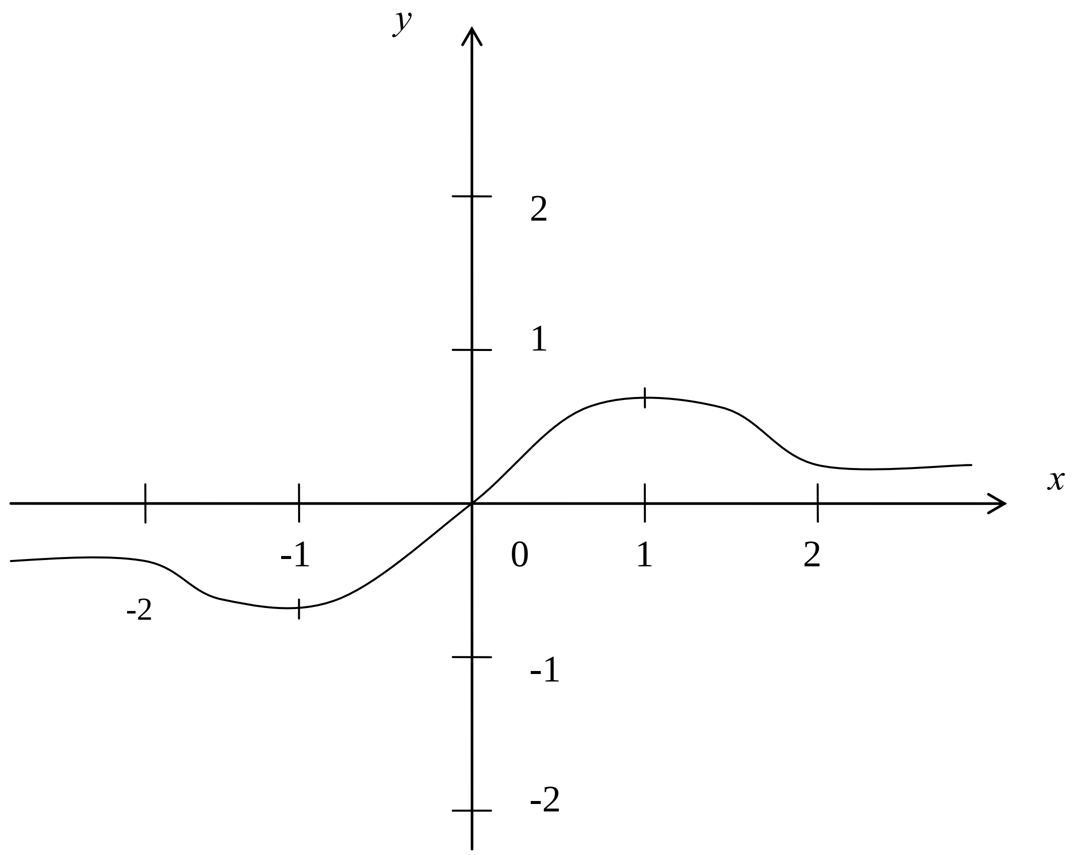
Функция выпукла вверх в интервале $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\bigcup\left(0;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, функция выпукла вниз в интервале $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}};0\right)\bigcup\left(\sqrt{\frac{3}{2}};+\infty\right)$.

Точки перегиба $x_1=-\sqrt{\frac{3}{2}};\ x_2=0,\ x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$y\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot e^{-\frac{3}{2}}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^3}}\approx-0{,}26$$

$$y(0)=0\cdot e^0=0$$

$$y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot e^{-3/2}\approx0{,}26$$



3. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

В задачах 1-20 даны координаты вершин треугольника *ABC*. Найти 1) длину стороны *AB*; 2) уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; 3) угол *B* в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение высоты *CD* и ее длину; 5) уравнение медианы *AE* и координаты точки *K* пересечения этой медианы с высотой *CD*; 6) уравнение прямой, проходящей через точку *K* параллельно стороне *AB*; 7) координаты точки *M*, расположенной симметрично точке *A* относительно прямой *CD*.

1. *A*(-7; -2), *B*(5; -11), *C*(9; 11).
2. *A*(-4; 8), *B*(8; -1), *C*(12; 21).
3. *A*(-11; 0), *B*(1; -9), *C*(5; 13).
4. *A*(-9; 10), *B*(3; 1), *C*(7; 23).
5. *A*(1; 3), *B*(13; -6), *C*(17; 16).
6. *A*(-8; 7), *B*(4; -2), *C*(8; 20).
7. *A*(2; 1), *B*(14; -8), *C*(18; 14).
8. *A*(-3; 11), *B*(9; 2), *C*(13; 24).
9. *A*(3; 6), *B*(15; -3), *C*(19; 19).
10. *A*(0; 5), *B*(12; -4), *C*(16; 18).
11. *A*(-1; 8), *B*(11; -1), *C*(9; 13).
12. *A*(-5; 9), *B*(7; 0), *C*(5; 14).
13. *A*(4; 7), *B*(16; -2), *C*(14; 12).

14. $A(-9; 6)$, $B(3; -3)$, $C(1; 11)$.
15. $A(-3; 12)$, $B(9; 3)$, $C(7; 17)$.
16. $A(-2; 11)$, $B(10; 2)$, $C(8; 16)$.
17. $A(5; 2)$, $B(17; 7)$, $C(15; 7)$.
18. $A(-6; 5)$, $B(6; -4)$, $C(4; 10)$.
19. $A(1; 4)$, $B(13; -5)$, $C(11; 9)$.
20. $A(-4; 10)$, $B(8; 1)$, $C(6; 15)$.

В задачах 21-25 составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от данной точки $A\ x_1, y_1$ и данной прямой $y=b$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и затем построить кривую.

21. $A\ 2,\ 5\ ,\ y=1$.

22. $A\ 3,\ -4\ ,\ y=2$.

23. $A\ -4,\ 3\ ,\ y=-1$.

24. $A\ -2,\ -3\ ,\ y=-1$.

25. $A\ 1,\ -1\ ,\ y=3$.

В задачах 26-30 составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до данной точки $A\ x_1, y_1$ и до данной прямой $x=a$ равно числу ε. Полученное уравнение привести к простейшему виду и затем построить кривую.

26. $A\ 6,\ 0\ ,\ x=1{,}5,\ \varepsilon=2$.

27. $A\ 3,\ 0\ ,\ x=\dfrac{4}{3},\ \varepsilon=1.5$.

28. $A\ 10,\ 0\ ,\ x=2{,}5,\ \varepsilon=2$.

29. $A\ 2,\ 0\ ,\ x=4{,}5,\ \varepsilon=2/3$.

30. $A\ 3,\ 0\ ,\ x=12,\ \varepsilon=0{,}5$.

В задачах 31-35 даны координаты точек $A\ x_1, y_1$, $B\ x_2, y_2$ и радиус окружности R, центр которой находится в начале координат. Требуется: 1) составить каноническое уравнение эллипса, проходящие через данные точки A и B; 2) найти полуоси, фокусы и эксцентриситет этого эллипса; 3) найти все точки пересечения эллипса с данной окружностью; 4) построить эллипс и окружность.

31. $A\ 4;\ -2\ ,\ B\ 2;\ \sqrt{7}\ ,\ R=2\sqrt{5}$.

32. $A\ -8;\ 4\ ,\ B\ 4\sqrt{7};\ -2\ ,\ R=4\sqrt{5}$.

33. $A\ \sqrt{6};\ -2\ ,\ B\ -3;\ \sqrt{2}\ ,\ R=3$.

34. $A\ -6;\ 2\sqrt{6}\ ,\ B\ 3\sqrt{2};\ 6\ ,\ R=8$.

35. $A\ 2\sqrt{6};\ -4\ ,\ B\ 6;\ 2\sqrt{2}\ ,\ R=2\sqrt{10}$.

В задачах 36-40 даны координаты точек $A\ x_1, y_1$ и $B\ x_2, y_2$. Требуется:

1) составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через данные точки A и B, если фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс; 2) найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот этой гиперболы; 3) найти все точки пересечения гиперболы с окружностью с центром в начале координат, если эта окружность проходит через фокусы гиперболы; 4) построить гиперболу, ее асимптоты и окружность.

36. $A\ \ -3;\ 4\ \ ,\ B\ \ -5;\ 4\sqrt{5}\ \ .$

37. $A\ \ 4;\ -6\ \ ,\ B\ \ 6;\ 4\sqrt{6}\ \ .$

38. $A\ \ -4;\ -3\ \ ,\ B\ \ 8;\ 9\ \ .$

39. $A\ \ 8;\ 12\ \ ,\ B\ \ -6;\ 2\sqrt{15}\ \ .$

40. $A\ \ 8;\ 6\ \ ,\ B\ \ 10;\ -3\sqrt{10}\ \ .$

В задачах 41-60 решить систему трех уравнений с тремя неизвестными при помощи определителей (для студентов, обучающихся по сокращенной программе, систему решить любым способом).

41. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=2, \\ x_1-x_2+3x_3=-4, \\ 3x_1+5x_2+x_3=4. \end{cases}$

42. $\begin{cases} 4x_1+3x_2-2x_3=-1, \\ 3x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1-2x_2-3x_3=8. \end{cases}$

43. $\begin{cases} 5x_1-2x_2+x_3=-1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=6, \\ x_1-2x_2-x_3=-5. \end{cases}$

44. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+2x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-x_3=3, \\ x_1-2x_2-3x_3=4. \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=1, \\ x_1+2x_2+x_3=8, \\ 4x_1-3x_2-2x_3=-1. \end{cases}$

46. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=4, \\ 2x_1+x_2+3x_3=5, \\ 3x_1+4x_2+x_3=-2. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=3, \\ x_1+2x_2+x_3=2, \\ x_1-3x_2+4x_3=-1. \end{cases}$

48. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=1, \\ x_1-2x_2+3x_3=5, \\ 2x_1+3x_2-x_3=-4. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=1, \\ 2x_1+x_2+x_3=-7, \\ 2x_1-x_2-3x_3=5. \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=-4, \\ x_1-2x_2-x_3=-1, \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0. \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=2, \\ x_1+2x_2+3x_3=0, \\ x_1-x_2-2x_3=6. \end{cases}$

52. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+2x_3=3, \\ 2x_1+x_2-x_3=-5, \\ 5x_1-x_2+3x_3=4. \end{cases}$

53. $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=-1, \\ 2x_1+x_2-2x_3=7, \\ x_1-4x_2+x_3=0. \end{cases}$

57. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=3, \\ x_1+x_2-2x_3=4, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=0. \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=0, \\ x_1+x_2-2x_3=-7, \\ x_1-2x_2+3x_3=3. \end{cases}$

58. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3=0, \\ 3x_1+x_2-3x_3=-1, \\ 2x_1-x_2+5x_3=3. \end{cases}$

55. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=3, \\ x_1-x_2+2x_3=-4, \\ 2x_1+2x_2+x_3=4. \end{cases}$

59. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=1, \\ -x_1+5x_2-x_3=4, \\ 3x_1-x_2+4x_3=0. \end{cases}$

56. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2-x_3=7. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1-3x_2+x_3=-1, \\ x_1+x_2-2x_3=0, \\ 3x_1-x_2+x_3=3. \end{cases}$

В задачах 61-80 дана невыраженная матрица A. Требуется: 1) найти обратную матрицу A^{-1}; 2) пользуясь правилом умножения матриц, показать, что $A\cdot A^{-1}=E$, где E – единичная матрица.

61. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

67. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

62. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

68. $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

63. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

69. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

64. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

70. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

65. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

71. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

66. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

72. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

73. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

74. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & - & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

75. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

76. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

77. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

78. $A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

79. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

80. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

В задачах 81-100 даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Требуется: 1) записать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов; 2) найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; 3) найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$; 4) найти площадь грани *ABC*; найти объем пирамиды *ABCD*.

81. $A\ 2;-3;\ 1\ ,\ B\ 6;\ 1;\ -1\ ,\ C\ 4;\ 8;\ 2\ ,\ D\ 2;\ -1;\ 2$.

82. $A\ 5;-1;\ -4\ ,\ B\ 9;\ 3;\ -6\ ,\ C\ 7;\ 10;\ -14\ ,\ D\ 5;\ 1;\ -3$.

83. $A\ 1;-4;\ 0\ ,\ B\ 5;\ 0;\ -2\ ,\ C\ 3;\ 7;\ -10\ ,\ D\ 1;\ -2;\ 1$.

84. $A\ -3;-6;\ 2\ ,\ B\ 1;\ -2;\ 0\ ,\ C\ -1;\ 5;\ -8\ ,\ D\ -3;\ -4;\ 3$.

85. $A\ -1;\ 1;\ -5\ ,\ B\ 3;\ 5;\ -7\ ,\ C\ 1;\ 12;\ -15\ ,\ D\ -1;\ 1;\ -4$.

86. $A\ -4;\ 2;\ -1\ ,\ B\ 0;\ 6;\ -3\ ,\ C\ -2;\ 13;\ -11\ ,\ D\ -4;\ 4;\ 0$.

87. $A\ 0;\ 4;\ 3\ ,\ B\ 4;\ 8;\ 1\ ,\ C\ 2;\ 15;\ -7\ ,\ D\ 0;\ 6;\ 4$.

88. $A\ -2;\ 0;\ -2\ ,\ B\ 2;\ 4;\ -4\ ,\ C\ 0;\ 2;\ -1\ ,\ D\ -2;\ 2;\ -1$.

89. $A\ 3;\ 3;\ -3\ ,\ B\ 7;\ 7;\ -5\ ,\ C\ 5;\ 14;\ 13\ ,\ D\ 3;\ 5;\ -2$.

90. $A\ 3;\ 1;\ 1\ ,\ B\ 7;\ 5;\ -1\ ,\ C\ 5;\ 12;\ -9\ ,\ D\ 3;\ 3;\ 2$.

91. $A\ 0;\ 1;\ 3\ ,\ B\ 1;\ -1;\ 5\ ,\ C\ 11;\ 3;\ 13\ ,\ D\ -2;\ 1;\ 7$.

92. $A\ 3;\ 1;\ -2\ ,\ B\ 4;\ -1;\ 0\ ,\ C\ 14;\ 3;\ 8\ ,\ D\ 11;\ 5;\ 6$.

93. $A\ -8;\ 3;\ -1\ ,\ B\ -7;\ 1;\ 1\ ,\ C\ 3;\ 5;\ 9\ ,\ D\ 0;\ 7;\ 7$.

94. $A\ 2;\ -1;\ 4\ ,\ B\ 3;\ -3;\ -2\ ,\ C\ 13;\ 1;\ 6\ ,\ D\ 10;\ 3;\ 4$.

95. $A\ -4;\ 5;\ -5\ ,\ B\ -3;\ 3;\ -3\ ,\ C\ 7;\ 7;\ 5\ ,\ D\ 4;\ 9;\ 3$.

96. $A\ -2;\ 3;\ 2\ ,\ B\ -1;\ -5;\ 4\ ,\ C\ 9;\ -1;\ 12\ ,\ D\ 6;\ 1;\ 10$.

97. $A\ -3;\ 4;\ -3\ ,\ B\ -2;\ 2;\ -1\ ,\ C\ 8;\ 6;\ 7\ ,\ D\ 5;\ 8;\ 5$.

98. $A\ -5;\ 2;\ -4\ ,\ B\ -4;\ 0;\ -2\ ,\ C\ 6;\ 4;\ 6\ ,\ D\ 3;\ 6;\ 4$.

99. $A\ -7;\ 3;\ 1\ ,\ B\ -6;\ 1;\ 3\ ,\ C\ 4;\ 5;\ 11\ ,\ D\ 1;\ 7;\ 9$.

100. $A\ -6;\ -4;\ -3$, $B\ -5;\ -6;\ -1$, $C\ 5;\ -2;\ 7$, $D\ 2;\ 0;\ 5$.

В задачах 101-110 данную систему уравнений записать в матричной форме и затем решить с помощью обратной матрицы.

101. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = -1. \end{cases}$

106. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = -1, \\ 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

102. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

107. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 = -2. \end{cases}$

103. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

108. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 = -2, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = -3. \end{cases}$

104. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 = 2, \\ 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

109. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 4x_2 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

105. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 = 4, \\ 2x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

110. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

В задачах 111-120 данную систему уравнений решить методом Гаусса. Рекомендуются преобразования, связанные с последовательным исключением неизвестных, применять к решенной матрице данной системы.

111. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

115. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

112. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

116. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

113. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$

117. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$

114. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

118. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

119. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 \ + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

120. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 \ - x_2 + 3x_3 = -7, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

В задачах 121-140 вычислить указанные пределы:

121. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-3x+}{4x^3-2x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg^3 3x}{4x^3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\ 1+2x\ ^{\frac{x-1}{x}}$.

122. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3-x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\sin 5x^2 ctg 3x$; г) $\lim\limits_{x\to0}\ 1+tgx\ ^{\frac{1}{\sin x}}$.

123. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3-x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\sin 5x^2 ctg 3x$; г) $\lim\limits_{x\to0}\ 1+tgx\ ^{\frac{1}{\sin x}}$.

124. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\cdot tg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+13n}{-10+13n}\right)^{n-3}$.

125. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-x+3}{x^4-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3n}{-1+3n}\right)^{2n+3}$.

126. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+3}{x^4-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{-7+6n}{4+6n}\right)^{3n+2}$.

127. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x+3}{x-8x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\sin x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

128. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^4+3}{5x^4-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{12x^4-x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\arcsin 6x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

129. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{77x^2-x-4}{x-8x^2+6}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x}$.

130. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+3}{x^4-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{4x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{14x+1}{14x-122}\right)^{\frac{1}{x}}$.

131. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x^3+3x}{x^4-4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+4x-1}{9-3x+4x^2}\right)^{x}$.

132. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^4+3}{x^4-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin7\pi x}{\sin8\pi x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\ 1-3x^{\ \frac{x^2-1}{x}}$.

133. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-4x^2+6}{x^9-8x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{-\sqrt{x}+3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2x}{\sin2x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

134. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{16x^2-5x^4+3}{x^4-8x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{2\arcsin^2 2x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n^2-8}{5+7n^2}\right)^{\frac{n^3}{n^2+1}}$.

135. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x^3+3}{x^4-8x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3x}{x\cdot\sin2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-10}{x+1}\right)^{5x^2+2}$.

136. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+8}{x^3-8x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{1-\cos4x}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2+2}\right)^{\frac{1-n}{3}}$.

137. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^6-7x^2+9}{x^3-8x^5+5}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-1}{x^3+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}xctg4x$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{2n-2}\right)^{-n-2}$.

138. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x^2+6}{x^8-4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-\cos5x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-2}{3x^2+8}\right)^{x^2+8}$.

139. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^8-5x^2+5}{x^4-8x^8+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{tgx}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{9n^2-3n+4}{9n^2-9n-9}\right)^{n^2-3n-3}$.

140. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^6+1}{x^4-4x^6+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{x+5}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}3xctg5x$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-12}{10n+5}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}$.

В задачах 141-160 определить произвольные $\dfrac{dy}{dx}$, пользуясь формулами дифференцирования.

141. а) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^3+3x-2}}$; б) $y=\ s^{\sin2x}-\cos^2 2x^{\ 3}$; в) $y=\ln\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2-x^3}{x^3-6x}}$; д) $y=\ \ 2x+3\ \ ^{tgx}$.

142. а) $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^3-6x-5}}$; б) $y=\ \ 2^{arctgx}+\ln\ 1-x^2\ \ ^4$; в) $y=\ln tgx^3$;

г) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{3x^2+2}{x^3-2x}}$; д) $y=\ \ 1+\sin\ \ ^{x^3}$.

143. а) $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-3}}$; б) $y=\ \ 5^{\cos 3x}+\sin^2 2x\ \ ^3$; в) $y=arctg\dfrac{2x+1}{2x-1}$;

г) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{x^2+3}{x^3+7x}}$; д) $y=\ \ x^2+1\ \ ^{\sin x}$.

144. а) $y=\dfrac{3x}{\sqrt{x^3+4x^2-1}}$; б) $y=\ \ 2^{\arcsin 2x}+\arccos x\ \ ^5$; в) $y=\ln arctg\sqrt{x-1}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2-2}{x^3-3x}}$; д) $y=\ \ 2x^2+1\ \ ^{arctgx}$.

145. а) $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^3+5x^2-3}}$; б) $y=\ \ 2^{tg3x}-x^4\ \ ^3$; в) $y=e^{arctg^3\sqrt{2x+1}}$;

г) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2-4}{x^3+13x}}$; д) $y=\ \ \arcsin x\ \ ^{-\sqrt{1-x^2}}$.

146. а) $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+15x-2}}$; б) $y=\ \ 4^{ctg\sqrt{x}}+\sqrt{2x}\ \ ^3$; в) $y=\arcsin\sqrt{1-9x^2}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2-x^2}{x^3-5x}}$; д) $y=\ \ 3x+\sin x\ \ ^{x^2}$.

147. а) $y=\dfrac{5x-3}{\sqrt{x^2+4x-6}}$; б) $y=\ \ 3^{arctg2x}-\ln\ 1+2x^2\ \ ^5$; в) $y=\ln\sin\ 3^{x^3}\ $;

г) $y=\ln\sqrt[5]{\dfrac{4-2x^3}{x^3+4x}}$; д) $y=\ \ tg2x\ \ ^{tg3x}$.

148. а) $y=\dfrac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-7}}$; б) $y=\ \ 2^{\cos 2x}-\sin^2 x\ \ ^3$; в) $y=e^{\arccos\sqrt{1-x}}$;

г) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{5-x^4}{x^3-16x}}$; д) $y=\ \ x+1\ \ ^{arctg\sqrt{x}}$.

149. а) $y=\dfrac{3x^2-5}{\sqrt{x^4+3x}}$; б) $y=\ \ 4^{\arcsin 2x}-\sqrt{1-3x^2}\ \ ^3$; в) $y=\ln\arcsin\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$;

г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x^5}{x^3-2x}}$; д) $y=\ \ ctgx\ \ ^{\frac{1}{\cos x}}$.

150. а) $y=\dfrac{x^4-11}{\sqrt{x^5-8x+2}}$; б) $y=\ 6^{arctg2x}+arctg5x\ ^{4}$; в) $y=\ln tg\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{9-3x^4}{x^3+13x}}$; д) $y=\ x+3\ln x\ ^{2/x}$.

151. а) $y=\dfrac{3x+2}{\sqrt{x^3+3x-1}}$; б) $y=\left(2^{tg3x}-\dfrac{1}{\cos 3x}\right)^6$; в) $y=\dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$;

г) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{2x+3}{x^2-6x+4}}$; д) $y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{x^3}$.

152. а) $y=\dfrac{5x-2}{\sqrt{x^4+5x-3}}$; б) $y=\ 3^{\cos 2x}+\cos^3 x\ ^{4}$; в) $y=e^{arctg\sqrt{x^3+2}}$;

г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{5-4x^2}{x^2+8x+10}}$; д) $y=\ \arcsin\sqrt{x}\ ^{3\sqrt[3]{x}}$.

153. а) $y=\dfrac{2x+7}{\sqrt{x^2-8x+14}}$; б) $y=$; в) $y=$;

г) $y=\ln\sqrt[8]{\dfrac{4x^2-1}{4x^2+1}}$; д) $y=\ tg2x\ ^{\cos 2x}$.

154. а) $y=\dfrac{3x-4}{\sqrt{x^2+9x-6}}$; б) $y=\ 5^{\sin 2x}-2x\ ^{3}$; в) $y=\ln\cos e^{-4x}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^3-2}{x^3+2}}$; д) $y=\ 1-x^2\ ^{\arcsin x}$.

155. а) $y=\dfrac{5x+4}{\sqrt{x^2-5x-2}}$; б) $y=\ 2^{\arcsin x}-\sqrt{1-x^2}\ ^{5}$; в) $y=e^{arctg\sqrt[3]{x^2-1}}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x^2-2}{3x^2+2}}$; д) $y=\ 2x+3\ ^{tgx}$.

156. а) $y=\dfrac{3x-1}{\sqrt[3]{x^3+9x-1}}$; б) $y=\ 3^{arctg2x}+\ln\ 1+4x^2\ \ ^{4}$; в) $y=\ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$;

г) $y=\ln\sqrt{\dfrac{3x^2-4}{3x^2+4}}$; д) $y=\ 2x+3\ ^{tgx}$.

157. а) $y=\dfrac{2x-3}{\sqrt[3]{x^3-8x+4}}$; б) $y=\ 4^{tg2x}-tg2x\ ^{5}$; в) $y=\ln arctg\dfrac{1}{x}$;

г) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^4-3}{x^4+3}}$; д) $y=\ x^4+1\ ^{\frac{1}{x}}$.

158. а) $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}$; б) $y=\left(5^{tg^2x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^3$; в) $y=e^{\arccos\sqrt{1-x^2}}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{3x+1}{3x-1}}$; д) $y=\ \cos 2x\ ^{tg2x}$.

159. а) $y=\dfrac{4x+3}{\sqrt[3]{x^3-4x-1}}$; б) $y=\ 2^{\arccos\sqrt{x}}-\sqrt{1-x}\ ^4$; в) $y=\ln tge^{2\sqrt{x}}$;

г) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{2x^2-3}{2x^2+3}}$; д) $y=\ ctgx\ ^{\sin^2 x}$.

160. а) $y=\dfrac{5x-6}{\sqrt[3]{x^3+5x-2}}$; б) $y=\ 3^{ctg^2 x}+\ln\sin x\ ^3$; в) $y=e^{arcctg\sqrt{4x-1}}$;

г) $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{2x^2+1}{2x^3-1}}$; д) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

В задачах 161-181 исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и начертить их график. Исследование и построение графика рекомендуется проводить по следующей схеме: 1) найти область существования функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в точках разрыва; 3) выяснить, не является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти точки экстремума функции и определить интервалы возрастания и убывания функции; 5) найти точки перегиба графика функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции; 6) найти асимптоты графика функции, используя результаты исследования; при необходимости можно дополнительно находить точки графика, давая аргументу *x* ряд значений и вычисляя соответствующие значения *y*.

161. $y=2x-3\sqrt[3]{x^2}$.

162. $y=x-2+\dfrac{4}{x-2}$.

163. $y=x-\ln\ x+2$.

164. $y=\dfrac{4x^3}{3\ x^2+1}$.

165. $y=\dfrac{e^{x-1}}{x}$.

166. $y=\dfrac{8x}{x-2\ ^2}$.

167. $y=\dfrac{x^2}{2\ x-1}$.

168. $y=\ln\ x^2+2x+2$.

169. $y=2x\ln x$.

170. $y=\dfrac{x^3}{x-1\ ^2}$

171. $y=\dfrac{x^3}{3\ x^2-3}$.

172. $y=\dfrac{2\ x-1\ ^2}{x^2}$.

173. $y=\dfrac{\sqrt{e^x}}{x}$.

174. $y=\dfrac{3\ln x}{x}$.

175. $y=4xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

176. $y=\dfrac{4x^3}{9\ 3-x^2}$.

177. $y=4xe^{-x}$.

178. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}$.

179. $y=\ln\ x^2+4x+5\ $.

180. $y=\frac{2x^2}{2x-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. –М., 1969.
2. Задачи и упражнения по математическому анализу для вузов/ под ред. Б.П. Демидовича. М.: «Наука», 1966.
3. Запорожец Т.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: «Высшая школа», 1966.
4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Г. Сборник задач по высшей математике. –М., 2003.
5. Минорский В.Л. Сборник задач по высшей математике. –М., 1961.

Попова Галина Александровна

МАТЕМАТИКА

Методическое пособие и контрольные задания для студентов заочно-сокращенной формы обучения направлений «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», «Наземные транспортно-технологические комплексы», «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 29.12.12. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 2,88. Тираж 50 экз. Зак. 12-1133. Рег. № 215.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.